Решение задачи линейного программирования симплекс методом.  
Нахождение наименьшего значения функции

**Задача:**

Найти наименьшее значение функции

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | = | - | x1 | - | x2 |

при следующих ограничениях:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | ≤ | 60 |
|  | 2 | x1 | + |  | x2 | ≤ | 80 |
|  |  |  |  |  | x2 | ≤ | 20 |

x1 ≥ 0    x2 ≥ 0    

**Решение:**

**1. Свободные члены системы должны быть неотрицательными.**

Данное условие выполнено.

**2. Каждое ограничение системы должно представлять собой уравнение.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | ≤ | 60 |
|  | 2 | x1 | + |  | x2 | ≤ | 80 |
|  |  |  |  |  | x2 | ≤ | 20 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  | = | 60 |
|  | 2 | x1 | + |  | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  | = | 80 |
|  |  |  |  |  | x2 |  |  |  |  |  |  | + |  | S3 | = | 20 |

S1 ≥ 0, S2 ≥ 0, S3 ≥ 0.   Введенные переменные S1, S2, S3, называются балансовыми переменными.

**3. Нахождение начального базиса и значения функции F, которое соответствует найденному начальному базису.**

**Что такое базис?**  
Переменная называется базисной для данного уравнения, если она входит в данное уравнение с **коэффициентом один** и не входит в оставшиеся уравнения системы (при условии, что в правой части уравнения стоит неотрицательное число).  
Если в каждом уравнении присутствует базисная переменная, тогда говорят, что в системе присутствует базис.  
Переменные, которые не являются базисными, называются свободными.  
  
**В чем заключается идея симплекс метода?**  
Каждому базису соответствует единственное значение функции. Одно из них является наименьшим значением функции F.  
Мы будем переходить от одного базиса к другому.  
Следующий базис будем выбирать таким образом, чтобы получить значение функции F не больше имеющегося.  
Очевидно, количество возможных базисов для любой задачи число не очень большое.  
Следовательно, рано или поздно, ответ будет получен.  
  
**Как осуществляется переход от одного базиса к другому?**  
Запись решения удобнее вести в виде таблиц. Каждая строка таблицы эквивалентна уравнению системы. Выделенная строка состоит из коэффициентов функции (см. таблицу ниже). Это позволяет не переписывать переменные каждый раз, что существенно экономит время.  
B выделенной строке выбираем наименьший отрицательный коэффициент (можно выбрать любой отрицательный).  
Это необходимо для того, чтобы получить значение функции F не больше имеющегося.  
Выбран столбец.  
Для положительных коэффициентов выбранного столбца считаем отношение Θ и выбираем наименьшее значение.  
Это необходимо для того, чтобы после преобразования столбец свободных членов остался неотрицательным.  
Выбрана строка.  
Определен элемент, который будет базисным. Далее считаем.  
  
**В нашей системе есть базис?**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  | = | 60 |
|  | 2 | x1 | + |  | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  | = | 80 |
|  |  |  |  |  | x2 |  |  |  |  |  |  | + |  | S3 | = | 20 |

Базис есть, т.е. мы можем начать решение.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | = | - | x1 | - | x2 |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. систему)  
Функция F выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции F, для данного базиса, можно найти мгновенно.

|  |  |
| --- | --- |
| x1 = 0   x2 = 0   S1 = 60   S2 = 80   S3 = 20 | => F = 0 |

Начальный базис найден и получено значение функции F, соответствующее найденному базису.

**4. Нахождение наименьшего значения функции F.**

Шаг №1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 | св. член | Θ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 60 | 60 : 1 = 60 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 80 | 80 : 2 = 40 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 |  |
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | F - 0 |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 60 |  |
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 40 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 |  |
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | F - 0 |  |
| 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 0 | 20 |  |
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 40 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 |  |
| 0 | -1/2 | 0 | 1/2 | 0 | F + 40 |  |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)  
Функция F выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции F, для данного базиса, можно найти мгновенно. (см. выделенную строку таблицы)

|  |  |
| --- | --- |
| x2 = 0   S2 = 0   x1 = 40   S1 = 20   S3 = 20 | => F + 40 = 0   => F = -40 |

Шаг №2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 | св. член | Θ |
| 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 0 | 20 | 20 : 1/2 = 40 |
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 40 | 40 : 1/2 = 80 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 20 : 1 = 20 |
| 0 | -1/2 | 0 | 1/2 | 0 | F + 40 |  |
| 0 | 0 | 1 | -1/2 | -1/2 | 10 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1/2 | -1/2 | 30 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 |  |
| 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | F + 50 |  |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)  
Функция F выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции F, для данного базиса, можно найти мгновенно. (см. выделенную строку таблицы)

|  |  |
| --- | --- |
| S2 = 0   S3 = 0   x1 = 30   x2 = 20   S1 = 10 | => F + 50 = 0   => F = -50 |

Среди коэффициентов выделенной строки нет отрицательных. Следовательно, найдено наименьшее значение функции F.

**Ответ:**

x1 = 30   x2 = 20

Fmin = -50